

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA E
ASTRONOMIA
“GALILEO GALILEI”



CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Effetti della deformazione sulle
proprietà delle
risonanze dipolari nei nuclei**

RELATORE: **Andrea Vitturi**
CO-RELATORE: **José Antonio Lay Valera**

LAUREANDO: **Marco Faccioli**

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

Indice

1	Il modello a goccia di liquido del nucleo	2
1.1	La formula semiempirica di massa	2
1.2	Descrizione dinamica della goccia sferica	3
1.3	I moti vibrazionali	4
1.4	Il modello a goccia per nuclei deformati a simmetria assiale . . .	5
1.4.1	Modello nel caso statico	5
1.4.2	Modello nel caso dinamico: moti vibrazionali e rotazionali	6
2	Le risonanze giganti di dipolo	9
2.1	Breve introduzione al fenomeno	9
2.2	Il modello di Goldhaber-Teller	10
2.3	Modello di Goldhaber e Teller per nuclei deformati	13
2.3.1	Oscillazioni lungo l'asse di simmetria	14
2.3.2	Oscillazioni ortogonali all'asse di simmetria	15
3	Le risonanze Pygmy di dipolo	17
3.1	Breve introduzione al fenomeno	17
3.2	Il modello del nucleo a tre fluidi per nuclei sferici	17
3.3	Il modello del nucleo a tre fluidi per nuclei deformati	20
4	Il caso del ^{150}Sn	23
4.1	Studio numerico delle risonanze giganti	23
4.1.1	Calcolo del rapporto tra le probabilità.	23
4.1.2	Studio delle risonanze giganti con parametro di deforma- zione fissato	25
4.2	Studio numerico delle risonanze pygmy	28
4.2.1	Calcolo dell rapporto tra le probabilità	28
4.2.2	Studio delle risonanze pygmy con parametro di deforma- zione fissato	29
5	Conclusioni	36

Capitolo 1

Il modello a goccia di liquido del nucleo

Storicamente venne notato che il nucleo era, in prima approssimazione, simile ad una goccia di liquido. Ed effettivamente il potenziale dell'interazione delle molecole di un liquido e quello dell'interazione nucleare hanno diverse somiglianze: in entrambi i casi per distanze piccolissime si ha una repulsione, poi il potenziale diventa attrattivo con un solo minimo e infine va a zero all'infinito. Inoltre mentre nel caso dei liquidi il lavoro di estrazione è costante al variare del volume (cioè l'energia che bisogna fornire ad una goccia per estrarre una molecola non dipende dal volume di essa) allo stesso modo l'energia di legame (useremo l'acronimo BE, "binding energy") dei nucleoni nei nuclei è proporzionale ad A e perciò il rapporto BE/A è circa costante. Questo è dovuto al fatto che il raggio d'azione dell'interazione nucleare è piccolo e quindi i nucleoni interagiscono solo con i loro vicini. Detto questo vediamo ora più da vicino questo modello.

1.1 La formula semiempirica di massa

Il primo successo sperimentale del modello a goccia di liquido fu la formula semiempirica di massa, che per un nucleo di numero di massa A e di numero atomico Z è:

$$BE(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \frac{a_p}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (1.1)$$

ove $a_v = 15.56 \text{ MeV}$, $a_s = 17.23 \text{ MeV}$ e $a_a = 23.28 \text{ MeV}$ hanno un valore ricavato dal fit coi dati sperimentali mentre $a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 0.70 \text{ MeV}$, con $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ il raggio dell'interazione, e a_p uguale a 12 MeV per nuclei pari-pari, a 0 per nuclei pari-dispari e a -12 MeV per nuclei dispari-dispari. In particolare il primo termine è detto termine di volume perché proporzionale ad A ed è il termine predominante (tutti gli altri sono termini correttivi). Il secondo è il termine di superficie, che in piena analogia col caso dei liquidi, tende a diminuire l'energia di legame, è dovuto al fatto che i nucleoni vicino alla superficie del nucleo interagiscono più debolmente che quelli all'interno. Il terzo è il termine coulombiano, dovuto alla presenza dei protoni che tendono a respingersi. Il quarto, termine

puramente quantistico, è il termine di asimmetria dovuto alle proprietà dell'interazione nucleare e al principio di Pauli. Infine l'ultimo, anch'esso di natura quantistica, è il termine di pairing. Si può notare che per nuclei più leggeri la $BE(A, Z)$ ha un massimo per $A = 2Z$ e infatti fino al ^{40}Ca i nuclei stabili sono quelli che hanno $N = Z$. Poi l'interazione coulombiana diventa troppo forte e per costruire stati legati stabili si deve avere un eccesso di neutroni.

Questa formula prevede abbastanza bene il valore dell'energia di legame per nuclei medi e pesanti, a parte per piccoli picchi non previsti in corrispondenza dei nuclei magici o doppiamente magici. Grazie al successo di questo modello i fisici nucleari si sono basati su di esso per la costruzione di modelli più sofisticati come quelli utilizzati nello studio delle risonanze di cui parla questo elaborato.

1.2 Descrizione dinamica della goccia sferica

Supponiamo di avere una goccia che a riposo ha forma sferica di raggio R_0 . Dovremo assumere l'incompressibilità del liquido che si traduce nell'invarianza del volume quando la goccia viene deformata a causa di una vibrazione. Utilizzando le armoniche sferiche $Y_{\lambda\mu}$ possiamo scrivere la formula del raggio dopo una qualsiasi deformazione, come:

$$R(\theta, \phi) = R_0(1 + \alpha_{00} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}) \quad (1.2)$$

dove gli $\alpha_{\lambda\mu}^*$ fungeranno da complessi coniugati delle coordinate langragiane $\alpha_{\lambda\mu}$, che verranno usate per scrivere le equazioni del moto. I termini $\alpha_{1\mu}$ in realtà possono essere eliminati: la deformazione causata da questi termini in realtà si traduce in una traslazione del centro di massa e quindi possono essere riassorbiti con un semplice cambio di sistema di riferimento e quindi non è un vero stato fisico accettabile. Il valore dell'indice λ si dice multipolarità. Per quanto riguarda i nomi delle multipolarità delle deformazioni sia statiche sia dinamiche dovute alla vibrazioni: i termini con $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ vengono detti rispettivamente monopolari, dipolari, quadrupolari, ottupolari, esadecupolari.

Nel caso delle risonanze giganti e pygmy invece il contributo dipolare non si può riassorbire in quanto, come vedremo, il nucleo non verrà più considerato come una goccia unica. Infatti nel caso delle risonanze giganti verrà usato un modello in cui i protoni e i neutroni formano due gocce distinte e le vibrazioni avvengono su entrambe e in controfase¹. In tal modo è impossibile trovare un riferimento in cui la forma del nucleo non cambi. Per l'analisi si prenderà come riferimento il sistema di riferimento del corpo fisso del nucleo. Ovviamente nel modello qui esposto, dove si tratta il nucleo come una singola goccia basta mettersi nel riferimento del centro di massa e l'effetto della vibrazione sparisce. Nel caso delle risonanze pygmy si considererà il nucleo come un insieme di tre gocce. In questo modello, come vedremo nel Capitolo 3, una delle gocce vibra contro le altre due.

¹Se le deformazioni avvenissero perfettamente in fase basterebbe andare nel riferimento del centro di massa del nucleo per riassorbire l'effetto

La condizione di incompressibilità inoltre fissa il valore della coordinata α_{00} come segue:

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda > 1, \mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (1.3)$$

Quindi nel caso delle vibrazioni il termine d monopolare contrasta la variazione di volume dovuta a tutti gli altri.

Per quanto riguarda le simmetrie del problema dobbiamo imporre l'invarianza per rotazioni attorno agli angoli di Eulero. Chiamando D le matrici di Wigner, e Ω la terna degli angoli di Eulero, le armoniche sferiche variano nel seguente modo per rotazioni attorno a tali angoli:

$$Y_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^\lambda(\Omega) Y_{\lambda\mu'} \quad (1.4)$$

In particolare abbiamo indicato l'armonica nel vecchio sistema di riferimento con l'indice primato e nel nuovo senza l'indice primato. Notiamo che l'indice λ non varia. Siccome $R(\theta, \phi)$ non può variare per rotazioni negli angoli di Eulero le coordinate langragiane devono variare allo stesso modo delle armoniche sferiche. Ovviamente deve anche valere, per lo stesso motivo la coppia di equazioni:

$$\alpha_{\lambda\mu} = (-)^\mu \alpha_{\lambda-\mu} \quad (1.5)$$

$$P\alpha_{\lambda\mu} = (-)^\lambda \alpha_{\lambda\mu} \quad (1.6)$$

ove l'operatore P è quello di parità.

1.3 I moti vibrazionali

Restando sempre nel caso sferico, il modello costruito nella precedente sezione ci è servito in realtà per costruire la langragiana:

$$L(\alpha_{\lambda\mu}, \dot{\alpha}_{\lambda\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} (B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 - C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2) \quad (1.7)$$

che con procedimenti standard di quantizzazione porta all'hamiltoniana quantizzata:

$$\hat{H}_{coll} = \sum_{\lambda, \mu} \hbar \Omega_\lambda (b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}) \quad (1.8)$$

ove il pedice “coll” sta per collettivo², e l'operatore $b_{\lambda\mu}$ è l'operatore di distruzione di un bosone e il suo aggiunto, indicato con l'apice “+” è l'operatore di creazione di un bosone. Tali operatori hanno le seguenti relazioni con le coordinate langragiane e i parametri B_λ e C_λ :

$$b^+ = \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu} - i \sqrt{\frac{1}{2B_\lambda \omega_\lambda \hbar}} \pi_{\lambda-\mu} \quad (1.9)$$

$$b = \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu} + i \sqrt{\frac{1}{2B_\lambda \omega_\lambda \hbar}} \pi_{\lambda\mu} \quad (1.10)$$

²Noi infatti stiamo facendo un modello collettivo.

ove:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} \quad (1.11)$$

$$\pi_{\lambda\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \quad (1.12)$$

sono rispettivamente la frequenza di oscillazione di multipolarità λ e il momento coniugato di $\alpha_{\lambda\mu}$. I bosoni, a cui gli operatori definiti sopra si riferiscono, sono i fononi e sono dotati di momento angolare e parità. Per quanto riguarda il valore di parità e momento angolare di questi bosoni, la simmetria assiale (che nel caso sferico è ovvia) impone che per stati con momento angolare pari vi sia una parità positiva e per stati con momento angolare dispari una parità negativa.

Supponiamo ora che il nucleo venga eccitato ad uno lo stato a singolo fonone con $\lambda = 2$, cioè una vibrazione quadrupolare con momento angolare e parità $I^\pi = 2^+$. Se poi si eccita un secondo fonone con stesso momento angolare e parità abbiamo uno stato degenere: questo stato infatti ha 3 possibili valori di I^π che sono $0^+, 2^+, 4^+$. Aggiungendo fononi si costruisce la banda $\lambda = 2$ che ha sempre parità positiva. Se invece si vuole costruire l'analoga banda ottupolare $\lambda = 3$ avremo per un numero di fononi pari parità negativa e per un numero di fononi dispari parità negativa. Nel nostro lavoro le oscillazioni che studieremo saranno sempre a singolo fonone e nel nostro caso dipolare.

Se la goccia ha densità $\rho(r, \theta, \phi)$ possiamo calcolarci i valori momenti elettrici di ordine polare qualsiasi. Per questi stati il valore del λ -polo è dato da:

$$Q_{\lambda\mu} = e \int \rho(r, \theta, \phi) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) r^2 dr d\Omega \quad (1.13)$$

dove e è la carica dell'elettrone. Quello che si vede è che durante le vibrazioni si hanno momenti di λ -polo elettrico diverso da zero. In particolare per vibrazioni quadrupolari si avrà un momento di quadrupolo elettrico.

1.4 Il modello a goccia per nuclei deformati a simmetria assiale

1.4.1 Modello nel caso statico

Finora abbiamo sempre supposto che le vibrazioni avvenissero attorno a una condizione a riposo di forma sferica. Lo stato fondamentale quindi non è più descrivibile usando solo il valore del raggio della goccia ma necessita di altri parametri. Quindi nel riferimento del corpo fisso la superficie del nucleo sarà della forma:

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right) \quad (1.14)$$

ove abbiamo messo il parametro di deformazione $\beta_{\lambda\mu}$ al posto di $\alpha_{\mu\nu}^*$. In realtà il nome è stato cambiato perché il significato fisico dei coefficienti è completamente diverso. La deformazione in questione è statica: non induce vibrazioni

ma al contrario induce solo rotazioni, che nel riferimento intrinseco del corpo rotante³ spariscono. Tuttavia nella descrizione geometrica della forma del nucleo svolgono ancora il ruolo di coordinate. La questione si fa di particolare interesse nel caso quadrupolare: in questo caso se si descrive il sistema con i parametri $\beta'_{\lambda\mu}$ nel laboratorio portandoci nel riferimento del corpo fisso le coordinate si riducono a due: infatti dei cinque gradi di libertà necessari a descrivere il sistema tre diventano gli angoli di Eulero, collettivamente indicati con la lettera Ω , gli altri due sono le coordinate β_{20} e β_{22} . Quindi si passa da un raggio esprimibile come:

$$R(\theta', \phi') = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^2 \beta'_{2\mu} Y_{2\mu} \right) \quad (1.15)$$

Ad una forma ben più semplice nel riferimento del corpo fisso:

$$R(\theta, \phi) = R_0 (1 + \beta_{20} Y_{20} + \beta_{22} (Y_{22} - Y_{2-2})) \quad (1.16)$$

avendo primato le coordinate del riferimento del laboratorio. Inoltre possiamo anche definire due nuovi parametri β_2 e γ che possono sostituire β_{20} e β_{22} nel modo seguente:

$$\beta_{20} = \beta_2 \cos(\gamma) \quad (1.17)$$

$$\beta_{22} = \frac{\beta_2 \sin(\gamma)}{\sqrt{2}} \quad (1.18)$$

Per $\gamma = 0$ si ha $\beta_{22} = 0$ e il raggio può essere scritto nella forma:

$$R(\theta, \phi) = R_0 (1 + \beta_2 Y_{20}) \quad (1.19)$$

Tale forma di R indica che il sistema è a simmetria assiale. Il sistema avrebbe simmetria assiale anche per γ retto però noi nel nostro lavoro assumeremo sempre che la deformazione sia proporzionale all'armonica sferica Y_{20} . Noi nell'elaborato studieremo sempre questo tipo di deformazioni: quadrupolari a simmetria assiale. Nella Figura 1.1 sono riportate per scopo illustrativo esempi semplici di deformazioni quadrupolari (a simmetria sferica) e ottupolari.

1.4.2 Modello nel caso dinamico: moti vibrazionali e rotazionali

Come nel caso precedente si può procedere costruendo la langragiana e poi l'hamiltoniana. Si trova ancora una volta la presenza di termini di vibrazione. Tuttavia nel caso della presenza di una deformazione abbiamo in realtà anche moti rotazionali. Tutto è riassunto dall'hamiltoniana:

$$\hat{H}_{coll} = T + V_{vibr} + T_{rot} \quad (1.20)$$

ove T e V_{vibr} sono i termini di energia cinetica ed energia vibrazionali, analoghi al caso sferico mentre T_{rot} è il termine che descrive la rotazione, che in caso di simmetria assiale, scegliendo l'asse 3 come asse di simmetria, si scrive:

$$T_{rot} = \frac{I^2 - I_3}{2J} \quad (1.21)$$

³Tale riferimento lo chiameremo anche con la denominazione di "riferimento del corpo fisso"

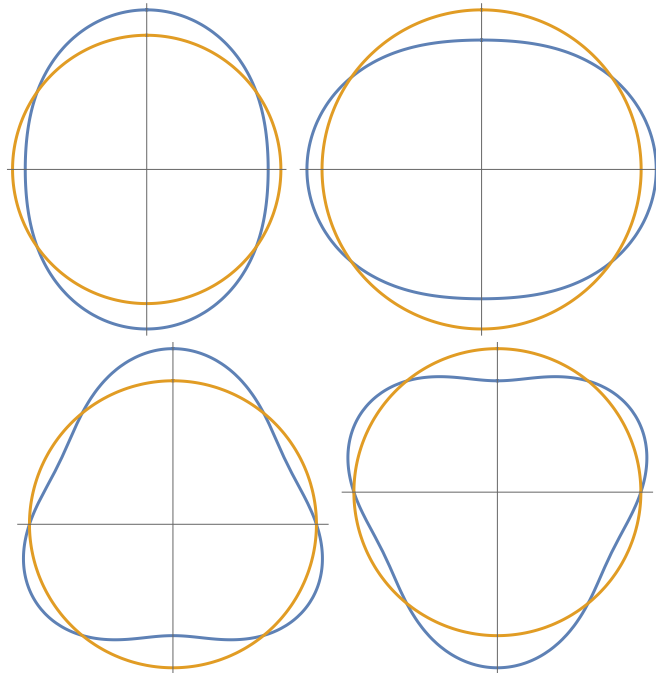


Figura 1.1: Esempi di deformazioni rispetto al caso sferico. In alto da sinistra abbiamo una deformazione quadrupolare con coefficiente positivo e una deformazione quadrupolare con coefficiente negativo. In basso invece abbiamo, nello stesso ordine: una deformazione ottupolare con coefficiente positivo e una deformazione ottupolare con coefficiente negativo.

ove I è il momento angolare totale, I_3 la sua componente lungo l'asse di simmetria e J il momento di inerzia.

Se siamo in presenza di nuclei con deformazioni con multipolarità pari (cioè $\lambda = 2, 4, 6, 8, \dots$) oltre alla simmetria assiale abbiamo anche la simmetria, chiamata R , di riflessione rispetto al piano equatoriale ortogonale all'asse di simmetria. In presenza di queste due simmetrie abbiamo uno spettro formato da bande di livelli energetici caratterizzati da valori del momento angolare pari e parità positiva oppure momento angolare dispari e parità negativa.

Nel nostro elaborato studieremo il caso di una deformazione quadrupolare e di vibrazioni dipolari. Una volta che il nucleo viene eccitato in stati a fonone singolo, questi portano lo stato ad una banda rotazionale di stati eccitati. Inoltre a causa della deformazione assiale avremo due tipi di vibrazione: quella lungo l'asse di simmetria che sarà di energia minore e quella lungo un asse ortogonale ad esso. Inoltre nei due casi il momento angolare nelle due bande sarà diverso. I due moti vibrazionali sono caratterizzati da un preciso valore della componente del momento angolare parallela all'asse di simmetria, designata col numero quantico K . Avremo $K = 0$ per una componente nulla⁴, $K = 1$ altrimenti⁵. Nel primo caso avremo, siccome permangono le simmetrie assiale e di riflessione, che ogni banda avrà o momento angolare dispari e parità negativa oppure momento angolare pari e parità positiva. Nel secondo caso invece la simmetria assiale si rompe e avremo bande caratterizzate solo da un valore fissato della parità.

⁴Tali vibrazioni si dicono β

⁵Tali vibrazioni si dicono γ

Capitolo 2

Le risonanze giganti di dipolo

2.1 Breve introduzione al fenomeno

Il fenomeno delle risonanze giganti di dipolo fu osservato per la prima volta nel 1947 da G. C. Baldwin and G. S. Klaiber [1] durante esperimenti di fotoassorbimento: fotoni γ di energie dell'ordine delle decine di MeV venivano fatti collidere con nuclei di Uranio. Si osservò che tali nuclei entravano prima in uno stato eccitato e successivamente subivano un processo di fissione. Anche negli anni successivi si svolsero esperimenti simili usando tecniche di fotoassorbimento e si notò che la sezione d'urto di tali stati era molto “grande”, cioè si sviluppava lungo un continuo di energie e con probabilità molto alta. Il nome “risonanza gigante” deriva proprio dalle alte energie e dalla enorme sezione d'urto.

Negli anni successivi alla scoperta vennero proposti due modelli semiclassici che spiegavano tali risonanze: quello proposto da Goldhaber e Teller nel 1948 [2] e quello proposto da Steinwedel e Jensen nel 1950 [3]. Il primo modello trattava la risonanza gigante come un'oscillazione dei protoni contro i neutroni assumendo che singolarmente i protoni e i neutroni formassero una goccia sferica di liquido incompressibile. Invece nel caso di Steinwedel e Jensen il nucleo nel complesso era una goccia sferica incompressibile mentre singolarmente protoni e neutroni non lo erano: la risonanza veniva spiegata come un moto di protoni contro neutroni all'interno di tale struttura rigida. In ogni caso l'elevata energia di queste risonanze viene spiegata, in entrambi i modelli, dal fatto che tutti i protoni e tutti i neutroni vibrano in controfase. In generale infatti moti con una così spiccata collettività richiedono energie molto grandi. In questo lavoro verrà usato il modello di Goldhaber e Teller estendendolo anche al caso deformato.

L'interesse di queste oscillazioni è rimasto elevato fin dalla loro scoperta in quanto sono molto utili per capire la struttura dei nuclei e la loro risposta a eccitazioni. Infatti le risonanze possono essere indotte sia, come già detto, da fotoassorbimento sia da collisioni con altri nuclei: in tal modo ad esempio si può osservare come la risposta varia al variare della causa della sollecitazione (infatti mentre i fotoni ovviamente causano eccitazioni di natura elettromagnetica mentre i nuclei producono sia interazioni nucleari ed elettromagnetiche). Un

altro ambito di interesse è quello, di cui è parte questo elaborato, in cui si vuole studiare l'effetto della deformazione nel comportamento di tali risonanze.

2.2 Il modello di Goldhaber-Teller

Per iniziare lo studio delle risonanze giganti, studiamo il caso in cui il nucleo sia sferico. Siccome la vibrazione è dipolare, quello che avviene non è una vibrazione della superficie del nucleo, ma invece un'oscillazione lungo una certa direzione delle posizioni dei centri di massa dei protoni e dei neutroni. Supponiamo che la vibrazione avvenga nella direzione individuata dall'armonica sferica $Y_{1\mu}$. Chiameremo, con $\Delta Y_{1\mu}$ la lunghezza di spostamento, cioè la distanza tra i due centri di massa. Siccome sta avvenendo un'oscillazione Δ è variabile nel tempo e assumeremo proprio che sia Δ la nostra variabile che descrive l'oscillazione. Siano ora $\rho_p(r)$ e $\rho_n(r)$ le densità rispettivamente di protoni e di neutroni. Restringiamoci allo studio di quello che avviene per i protoni¹. Quando avviene la risonanza ci aspettiamo che l'intera goccia di protoni (o di neutroni) si sposti lungo la direzione dell'oscillazione mantenendo la propria forma. Perciò se chiamiamo con $\rho_{p,vibr}$ la densità durante l'oscillazione avremo che:

$$\rho_{p,vibr}(r) = \rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu}) \quad (2.1)$$

ove abbiamo indicato con $\Delta_p Y_{1\mu}$ la distanza tra il centro di massa del nucleo, che sta fermo, e il centro di massa della goccia dei protoni. La relazione tra Δ_p e il Δ in realtà è semplice: se chiamiamo con $\Delta_n Y_{1\mu}$ la distanza tra il centro di massa del nucleo e quello dei neutroni, abbiamo se il centro di massa del nucleo rimane fermo:

$$\Delta_p = \frac{N}{A} \Delta \quad (2.2)$$

$$\Delta_n = -\frac{Z}{A} \Delta \quad (2.3)$$

Ora supponiamo che Δ sia piccolo: possiamo sviluppare $\rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu})$ in serie di Taylor attorno a $\Delta = 0$ ottenendo:

$$\rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu}) = \rho_p(r + \frac{N}{A} \Delta Y_{1\mu}) = \rho_p(r) + \Delta \frac{\partial \rho_p}{\partial \Delta}(r) \quad (2.4)$$

dove abbiamo trascurato i termini del secondo ordine.

Ora possiamo anche convertire la derivata rispetto a Δ nella derivata rispetto a r . Abbiamo poi che fare la derivata rispetto a r e rispetto a Δ è la stessa cosa a meno di un fattore $\frac{N}{A} Y_{1\mu}$. In ultima analisi quindi avremo che la densità dei protoni durante la vibrazione si potrà scrivere così:

$$\rho_p(r + \frac{N}{A} \Delta Y_{1\mu}) = \rho_p(r) + \frac{N}{A} \Delta Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (2.5)$$

Per quantificare lo spostamento della vibrazione useremo al posto di Δ il suo valore di aspettazione nella transizione tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato, che indicheremo con δ_1 , che si scrive nella notazione bra-ket:

$$\delta_1 = \frac{\langle 1^- | \Delta | 0^+ \rangle}{2I_{gs} + 1} = \langle 1^- | \Delta | 0^+ \rangle \quad (2.6)$$

¹Il procedimento per i neutroni è assolutamente identico

ove abbiamo indicato con I_{gs} il momento angolare dello stato fondamentale, che è nullo.

A questo punto possiamo scrivere la densità di transizione²:

$$\delta_{\rho_p} = \rho_p(r + \frac{N}{A}\delta_1 Y_{1\mu}) - \rho_p(r) = \frac{N}{A}\delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (2.7)$$

avendo sostituito la variabile Δ col suo valore di aspettazione δ_1 . Analogamente si procede per la densità di transizione dei neutroni:

$$\delta_{\rho_n} = -\frac{Z}{A}\delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \quad (2.8)$$

Come sappiamo dalla Sezione precedente si può osservare la risonanza utilizzando urti con altre particelle. Tali particelle, dette “sonde” possono essere fotoni, protoni e anche nuclei atomici. Se la sonda è composta di nucleoni allora può essere di due tipi: isoscalare o isovettoriale. Isoscalare quando il numero di protoni e il numero di neutroni è lo stesso. Isovettoriale quando il numero è diverso. Per fare un esempio il singolo protone può essere usato come una sonda isovettoriale³, la particelle α può essere usata come sonda isoscalare. Si nota che sonde isovettoriali tendono ad eccitare risonanze in cui i protoni oscillano contro i neutroni mentre le sonde isoscalari tendono a far oscillare nello stesso verso protoni e neutroni. Seguendo questi fatti si sono definite due nuove densità di transizione, la densità di transizione isoscalare, che indicheremo con $\delta_{\rho_{is}}$ e la densità di transizione isovettoriale, che indicheremo con $\delta_{\rho_{iv}}$. Tali densità di transizione hanno la seguente relazione con quelle di protoni e neutroni:

$$\delta_{\rho_{is}} = \delta_{\rho_n} + \delta_{\rho_p} \quad (2.9)$$

$$\delta_{\rho_{iv}} = \delta_{\rho_n} - \delta_{\rho_p} \quad (2.10)$$

Possiamo quindi descrivere le risonanze utilizzando queste densità di transizione invece che quelle di protoni e neutroni. Nel caso delle risonanze giganti di dipolo abbiamo che tutti i protoni oscillano contro tutti i neutroni. Ci aspettiamo quindi che tali risonanze abbiano una componente isoscalare molto piccola. Nel nostro lavoro assumeremo che la forma delle densità di protoni e neutroni sia la stessa: in tal caso il rapporto tra le due è esattamente $\frac{Z}{N}$. Le densità di protone e neutrone diventano:

$$\rho_p = \frac{Z}{A}\rho \quad (2.11)$$

$$\rho_n = \frac{N}{A}\rho \quad (2.12)$$

ove ρ , a riposo, è da considerarsi come la densità totale. In tal caso le densità di transizione di protoni e neutroni diventano:

$$\delta_{\rho_p} = \frac{NZ}{A^2}\delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (2.13)$$

$$\delta_{\rho_n} = -\frac{ZN}{A^2}\delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \quad (2.14)$$

²Più precisamente la densità di transizione è il valore di aspettazione della densità nella transizione dallo stato 0^+ allo stato 1^- , cioè in notazione bra-ket: $\delta_{\rho_p} = \langle 1^- | \rho_p | 0^+ \rangle$

³Poiché l'urto col fotone produce effetti analoghi a quello con un protone, il fotone si considera a tutti gli effetti una sonda isovettoriale

cioè hanno modulo uguale e segno opposto. Ovviamente in questo caso si ha che:

$$\delta_{\rho_{is}} = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta_{\rho_{iv}} = 2\delta_{\rho_n} = -2\delta_{\rho_p} \quad (2.16)$$

Quindi nel caso in cui la forma della densità è la stessa la componente isoscalare è esattamente nulla. Tale assunzione non vale per tutti i nuclei: in realtà essa vale solo per nuclei stabili con $N = Z$ e più ci si allontana da questo caso più l'approssimazione peggiora. Tuttavia in ogni caso la componente isoscalare è sempre molto piccola rispetto a quella isovettoriale e quindi noi useremo lo stesso questo modello anche nel caso in cui vi sarà una deformazione o un eccesso di neutroni⁴.

Per quantificare la “forza” della risonanza si introduce la grandezza $B(E1)$, detta intensità (o probabilità ridotta) di transizione, definita nel modo seguente:

$$B(E1) = | \langle 1^- | \hat{O}_1 | 0^+ \rangle |^2 \quad (2.17)$$

dove \hat{O}_1 è l'operatore di dipolo elettrico definito nel modo seguente:

$$\hat{O}_1 = \left(\sum_{i=1}^Z e \frac{N}{A} \vec{r}_{p,i} - \sum_{j=1}^N e \frac{Z}{A} \vec{r}_{n,j} \right) Y_{1\mu} \quad (2.18)$$

ove e è la carica dell'elettrone, $\vec{r}_{p,i}$ il raggio vettore del protone i -esimo e $\vec{r}_{n,j}$ il raggio vettore del neutrone j -esimo. Le sommatorie sono pesate coi coefficienti di spostamento introdotti per mantenere fisso il centro di massa. Se passiamo al modello semiclassico qui introdotto dobbiamo esprimere la $B(E1)$ in termini di densità:

$$B(E1) = \left| \int er Y_{1\mu}^* (\delta_{\rho_p} - \delta_{\rho_n}) Y_{00} r^2 dr d\Omega \right|^2 = \left| \int er Y_{1\mu}^* \delta_{\rho_{iv}} Y_{00} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (2.19)$$

Come si può notare la $B(E1)$ è univocamente dovuta al contributo della componente isovettoriale.

Si noti che per ora abbiamo solo detto che la forma della densità di protoni e neutroni deve essere la stessa ma in realtà non la abbiamo ancora specificata. Noi useremo in realtà la forma di Woods-Saxon. Perciò la densità nucleare totale a riposo sarà espressa da:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (2.20)$$

dove R_0 è il raggio del nucleo al livello fondamentale, a è la lunghezza della regione in cui la densità va rapidamente a zero (tale lunghezza è circa 0.5 fm) e infine ρ_0 che ha le stesse dimensioni della densità serve come fattore di normalizzazione. Le densità di protoni e neutroni quindi si esprimeranno come:

$$\rho_p(r) = \frac{Z}{A} \rho(r) \quad (2.21)$$

$$\rho_n(r) = \frac{N}{A} \rho(r) \quad (2.22)$$

⁴Nel Capitolo 4 analizzeremo il caso dello ^{150}Sn , nucleo molto deformato e con un forte eccesso di neutroni

2.3 Modello di Goldhaber e Teller per nuclei deformati

L'assunzione che ρ_p e ρ_n dipendessero solo dal raggio ora ovviamente non si può più fare in quanto la deformazione introduce una dipendenza angolare. Supponiamo per semplicità che la deformazione sia quadrupolare e descrivibile con l'armonica sferica $Y_{20}(\theta)$. Possiamo ad esempio utilizzare la forma per la densità, di Woods-Saxon:

$$\rho(r, \theta) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a}\right)} \quad (2.23)$$

Per quantificare la deformazione abbiamo dovuto introdurre il parametro di deformazione β_2 . Per $\beta_2 = 0$ si ha il nucleo sferico, per $\beta_2 > 0$ un nucleo prolato e infine per $\beta_2 < 0$ oblatto. Ora le densità di protoni e neutroni sono esprimibili nel modo seguente:

$$\rho_p(r, \theta) = \frac{Z}{A} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a}\right)} = \frac{Z}{A} \rho(r, \theta) \quad (2.24)$$

$$\rho_n(r, \theta) = \frac{N}{A} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a}\right)} = \frac{N}{A} \rho(r, \theta) \quad (2.25)$$

In tal modo il rapporto delle densità di protoni e neutroni è dunque semplicemente $\frac{Z}{N}$ lo stesso che si ha nel caso sferico.

Per studiare l'effetto della risonanza, possiamo senza ledere generalità, studiare cosa succede alla densità dei protoni. Studiamo il caso di deformazioni di tipo dipolare. Ora se definiamo un Δ con lo stesso significato che abbiamo scritto nella Sezione 2.2, avremo che la densità sarà ora data da:

$$\rho_{p,vibr}(r, \theta, \phi) = \frac{Z}{A} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}) + \frac{N}{A} \Delta Y_{1\mu}}{a}\right)} \quad (2.26)$$

Allora come abbiamo proceduto nella Sezione 2.2 per il caso sferico sviluppando in serie di Taylor otteniamo che:

$$\rho_{p,vibr}(r, \theta, \phi) \simeq \rho_p(r, \theta) + \frac{N}{A} \frac{\partial \rho_p(r, \theta)}{\partial r} \Delta Y_{1\mu} \quad (2.27)$$

e quindi la densità di transizione sarà data da, ponendo al posto di Δ il suo valore di aspettazione nella transizione δ_1 :

$$\delta_{\rho_p}(r, \theta, \phi) = \frac{N}{A} \frac{\partial \rho_p(r, \theta)}{\partial r} \delta_1 Y_{1\mu} \quad (2.28)$$

Analogamente nel caso dei neutroni avremo:

$$\delta_{\rho_n}(r, \theta, \phi) = -\frac{Z}{A} \frac{\partial \rho_n(r, \theta)}{\partial r} \delta_1 Y_{1\mu} \quad (2.29)$$

Si definiscono inoltre le densità di transizione isoscalare e isovettoriale:

$$\delta_{\rho_{is}} = \delta_{\rho_n}(r) + \delta_{\rho_p}(r) \quad (2.30)$$

$$\delta_{\rho_{iv}} = \delta_{\rho_n}(r) - \delta_{\rho_p}(r) \quad (2.31)$$

In tal modo si può vedere che anche in questo caso la risonanza gigante è un puro fenomeno isovettoriale. Questo in realtà vale solo in linea di principio: infatti nella realtà vi è sempre una piccola componente isoscalare che noi, nel nostro modello non riusciamo ad apprezzare.

La deformazione rompe ora la degenerazione che si aveva nel caso sferico. Se allora infatti la direzione dove la vibrazione avveniva era del tutto indifferente ora a causa della deformazione esiste una direzione diversa dalle altre individuata dall'asse di simmetria, l'asse dove avviene la deformazione. Quindi ne segue che la vibrazione lungo l'asse di simmetria e quelle in direzioni ortogonali ad esso ora avranno proprietà differenti. Se indichiamo con K la componente del momento angolare lungo l'asse di simmetria avremo due casi possibili: $K^\pi = 0^-$ e $K^\pi = 1^-$. Il primo caso identifica le vibrazioni lungo l'asse di simmetria, il secondo in una direzione ortogonale. Inoltre le prime mantengono la simmetria assiale mentre le seconde la violano.

Le oscillazioni lungo l'asse di simmetria e ortogonali ad esso in realtà sono anche distinguibili energeticamente. Per deformazioni prolata l'asse di simmetria è l'asse più lungo: in questa direzione il potenziale di interazione è più esteso che nelle direzioni ortogonali, perciò per i nucleoni è più conveniente oscillare proprio lungo l'asse di simmetria. In tal modo l'energia di tale oscillazione, descritta dal caso $K^\pi = 0^-$ sarà inferiore a quella del caso opposto, in cui l'oscillazione avviene lungo le direzioni ortogonali. Inoltre la maggior convenienza delle oscillazioni lungo l'asse di simmetria si rifletterà anche nella maggior probabilità. Nel caso invece di nuclei prolatti l'oscillazione è più conveniente, e quindi meno energetica, lungo le direzioni ortogonali, in quanto l'asse di simmetria questa volta è l'asse più corto. Ed è proprio grazie a questo “splitting” delle energie che possiamo distinguere i due tipi di oscillazioni. A tal proposito in Figura 2.1 vediamo lo splitting nel caso di isotopi di Neodimio.

2.3.1 Oscillazioni lungo l'asse di simmetria

Studiamo il caso $K^\pi = 0^-$. La deformazione è dipolare e avviene lungo l'asse 3 e quindi sarà proporzionale all'armonica sferica Y_{10} . In particolare se ρ_p e ρ_n sono come in (2.26-2.27) avremo delle densità di transizione:

$$\delta_{\rho_p} = \delta_1 \frac{N}{A} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} Y_{10} \quad (2.32)$$

$$\delta_{\rho_n} = -\delta_1 \frac{Z}{A} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} Y_{10} \quad (2.33)$$

Siccome però come abbiamo visto nel caso sferico la componente che da l'intensità della transizione è quella isovettoriale, noi ci riferiremo d'ora in poi a questa. A causa della deformazione quadrupolare ora ci aspettiamo che le proiezioni dell'oscillazione lungo le varie armoniche sferiche $Y_{\lambda 0}$ cambino. Fisicamente tali componenti rappresentano le densità di transizione dallo stato fondamentale a stati con momento angolare $I = \lambda$ misurate nel sistema del laboratorio⁵.

⁵Nel caso sferico siccome si è in assenza di rotazioni le misure nel sistema intrinseco e in quello del laboratorio coincidono.

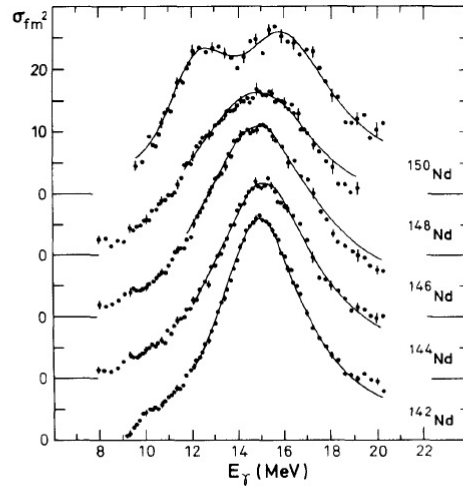


Figure 6-21 Photoabsorption cross section for even isotopes of neodymium. The experimental data are from P. Carlos, H. Beil, R. Bergère, A. Lepretre, and A. Veyssièr, *Nuclear Phys. A172*, 437 (1971). The solid curves represent Lorentzian fits with the parameters given in Table 6-6.

Figura 2.1: Figura tratta da [4]

Ora siccome in questo caso si preserva la simmetria assiale si avranno stati con momento angolare dispari e parità negativa. Quindi le proiezioni lungo le armoniche sferiche $Y_{\lambda 0}$ con λ dispari. Ci attendiamo che l'importanza di queste proiezioni sia complessivamente piccola rispetto alla proiezione della transizione allo stato 1^- . Tali proiezioni sono definite come segue:

$$\delta_{\rho_{iv},\lambda}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_p} Y_{\lambda 0}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (2.34)$$

Come vedremo l'integrazione lungo θ è irrisolvibile analiticamente. Dovremo infatti usare un metodo numerico.

Una volta risolto l'integrale lungo θ potremo finalmente calcolarci la probabilità⁶ con cui si ecciti uno stato 1^- . Tale probabilità a questo punto si calcola nel seguente modo:

$$B(E1)^{K=0} = \left| \int e r \delta_{\rho_{iv}} Y_{1\mu} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (2.35)$$

2.3.2 Oscillazioni ortogonali all'asse di simmetria

Studiamo ora il caso $K = 1^-$. Il procedimento è assolutamente identico. Prima si esprime la densità di transizione, poi si calcola l'integrale con le armoniche

⁶Nella formula che segue non c'è l'armonica sferica Y_{00} . Tuttavia, come poi vedremo a noi interessano i rapporti tra le $B(E1)$ per oscillazioni lungo l'asse di simmetria e ortogonali ad esso, quindi la Y_{00} , che è una funzione costante, si semplificherà nel calcolo del rapporto

sferiche e infine si calcola la probabilità dell'oscillazione dipolare come nella sottosezione precedente. Come prima utilizzeremo sempre la densità di transizione isovettoriale. A differenza che nel caso delle oscillazioni lungo l'asse di simmetria in questo caso la simmetria assiale viene rotta e quindi non si ha più la regola fissa che il momento angolare nella banda dello stato eccitato deve essere dispari. Questa volta l'unico vincolo è sulla parità che deve essere negativa. Ci attendiamo comunque che tutte le varie densità di transizione a livelli con $I > 1$ siano piccole rispetto a quella che porta al livello 1^- . A questo punto il calcolo delle proiezioni si svolge come prima:

$$\delta_{\rho_{iv},\lambda}^{\mu=\pm 1}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{\lambda\pm 1}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (2.36)$$

Quindi calcoleremo la probabilità delle oscillazioni con l'integrale:

$$B(E1)^{\mu=\pm 1} = \left| \int e r \delta_{\rho_{iv}} Y_{1\mu} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (2.37)$$

Infine per trovare la probabilità totale di oscillazioni ortogonali all'asse di simmetria definiamo:

$$B(E1)^{K=1} = B(E1)^{\mu=1} + B(E1)^{\mu=-1} = 2B(E1)^{\mu=1} \quad (2.38)$$

Si noti che tale probabilità è in realtà la somma di due componenti uguali, riferite a ciascuna armonica sferica.

Ci aspettiamo in sostanza che le oscillazioni lungo un asse ortogonale avvengano, per nuclei prolatti, con probabilità minore in quanto è più facile deformare lungo l'asse di simmetria⁷. In modo opposto invece si comporteranno i nuclei oblati. Per quantificare i risultati faremo il seguente rapporto che dipenderà da β_2 :

$$R(\beta_2) = \frac{B(E1)^{K=0}}{B(E1)^{K=1}} \quad (2.39)$$

⁷Si noti che però avendo definito la $B(E1)^{K=1}$ come la somma di due termini uguali si ha che il rapporto (2.39) per nuclei prolatti non darà sempre un risultato maggiore di uno, ma sempre maggiore di $\frac{1}{2}$ in quanto le dimensioni a disposizione per le oscillazioni ortogonali all'asse di simmetria sono due e quindi il rapporto deve dimezzarsi.

Capitolo 3

Le risonanze Pygmy di dipolo

3.1 Breve introduzione al fenomeno

Molto tempo dopo la scoperta delle risonanze giganti furono individuate, nel 1961 da Baldwin e Klaiber [5], alcune risonanze dipolari ad energie molto minori (nell'ordine del MeV) e con probabilità molto minore. Tali risonanze vennero notate anch'esse con esperimenti di fotoassorbimento, questa volta su nuclei con $N \gg Z$, cioè con un forte eccesso di neutroni. Tali nuclei, noi sappiamo possono essere sia stabili (infatti la valle di stabilità curva, per nuclei pesanti, verso nuclei con un forte eccesso di neutroni) sia instabili. In corrispondenza dei numeri magici abbiamo che il nucleo, stabile, ha una forma sferica, mentre per nuclei lontani dalla valle, la loro instabilità corrisponde ad una pesante deformazione del nucleo. Inoltre, cosa che accomuna tutti i nuclei con eccesso di neutroni, si notò studiando le sezioni d'urto che la densità di protoni era pressoché nulla vicino alla superficie: in sostanza il nucleo poteva essere pensato come un sistema formato da un "core", vicino al centro con protoni e neutroni, e da uno "skin" o "valenza" formato da solo neutroni che avvolgeva il core.

Nel 1971 [6] fu proposto in analogia con il caso delle risonanze giganti un modello idrodinamico per spiegare il fenomeno. Tale modello semiclassico, introdotto da R. Mohan, M. Danos e L.C. Biedenharn spiegava l'oscillazione nel modo seguente: il nucleo non era più composto, come nei modelli delle risonanze giganti, da due liquidi incompressibili bensì da tre: i protoni, i neutroni del core e i neutroni dello skin. Per spiegare la risonanza tale modello assumeva che protoni e neutroni del core vibravano contro i neutroni della valenza (o skin).

Come nel caso della risonanza gigante lo scopo di questa tesi è studiare come al variare della deformazione del nucleo varia il comportamento delle risonanze.

3.2 Il modello del nucleo a tre fluidi per nuclei sferici

La differenza col modello di Goldhaber-Teller sta come già detto nel considerare il nucleo formato non più da due ma da tre gocce. In questo modello il nucleo

è formato da due regioni: quella interna, il core, è formata da protoni e neutroni, quella esterna, detta skin o valenza, è formata da solo neutroni. Questa suddivisione è basata su dati sperimentali che mostrano, per nuclei con un forte eccesso di neutroni, che la densità dei protoni vicino alla superficie del nucleo è praticamente nulla. Nella zona esterna quindi il nucleo è popolato solo da neutroni. Siano innanzitutto ρ_p e ρ_n le densità di protoni e (totale) di neutroni. Su di esse imponiamo la simmetria sferica. Le densità neutroniche di core e di valenza sono definite come segue:

$$\rho_n^C = \frac{N^C}{Z} \rho_p \quad (3.1)$$

$$\rho_n^V = \rho_n - \rho_n^C \quad (3.2)$$

dove N^C è il numero di neutroni del core. Si noti che tali densità essendo somme di funzioni a simmetria sferica mantengono tale simmetria. A questo punto in modo analogo a quanto fatto nel Capitolo precedente per le risonanze giganti di dipolo restringiamoci al caso dei protoni. La densità dei protoni durante la vibrazione sarà, grazie al fatto che la goccia non cambia forma:

$$\rho_{p,vibr} = \rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu}) = \rho_p + \Delta_p \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (3.3)$$

Ora in questo caso i coefficienti relativi allo spostamento dei centri di massa cambiano. In questo caso infatti si ha che:

$$\Delta_p = \Delta_{n^C} = \frac{N^V}{A} \Delta \quad (3.4)$$

$$\Delta_{n^V} = \frac{N^C + Z}{A} \Delta \quad (3.5)$$

avendo indicato con rispettivamente $\Delta_{n^C} Y_{1\mu}$ e $\Delta_{n^V} Y_{1\mu}$ le distanze dal centro di massa del nucleo al centro di massa dei neutroni del core (che coincide con quello dei protoni) e con quello dei neutroni di valenza, mentre $\Delta Y_{1\mu}$ è la distanza tra i centri di massa di core e valenza. A questo punto possiamo scrivere le densità dei protoni come:

$$\rho_{p,vibr} = \rho_p + \frac{N^V}{A} \Delta Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (3.6)$$

Ora chiamando con δ_1 il valore di aspettazione di Δ nella transizione dallo stato fondamentale a quello eccitato, avremo la densità di transizione:

$$\delta_{\rho_p} = \frac{N^V}{A} \delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \quad (3.7)$$

In modo analogo otteniamo le densità di transizione dei neutroni:

$$\delta_{\rho_n^C} = \frac{N^V}{A} \delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_n^C}{\partial r} \quad (3.8)$$

$$\delta_{\rho_n^V} = -\frac{Z + N^C}{A} \delta_1 Y_{1\mu} \frac{\partial \rho_n^V}{\partial r} \quad (3.9)$$

e le densità di transizione isoscalare e isovettoriale:

$$\delta_{\rho_{is}} = \delta_{\rho_n^C} + \delta_{\rho_n^V} + \delta_{\rho_p} \quad (3.10)$$

$$\delta_{\rho_{iv}} = \delta_{\rho_n^C} + \delta_{\rho_n^V} - \delta_{\rho_p} \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

Ora siccome non abbiamo che non tutti i neutroni vibrano contro i protoni è anche lecito aspettarsi che la componente isoscalare possa essere confrontabile con quella isovettoriale¹.

A questo punto possiamo procedere nel calcolo della $B(E1)$. Siccome la definizione dell'operatore è la stessa avremo che scritta tramite l'integrale delle densità di transizione avremo che:

$$B(E1) = \left| \int e r Y_{1\mu}^* \delta_{\rho_{iv}} Y_{00} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (3.13)$$

In queste risonanze, a differenza che nel caso delle risonanze giganti la componente isoscalare non è nulla. Possiamo quindi quantificare l'intensità della transizione isoscalare calcolando una $B(E1)_{is}$ ². La $B(E1)_{is}$ è così definita:

$$B(E1)_{is} = \left| \langle 1^- | \hat{O}_1^{is} | 0^+ \rangle \right|^2 \quad (3.14)$$

dove questa volta l'operatore \hat{O}_1^{is} è dunque:

$$\hat{O}_1^{is} = e \left(\sum_{i=1}^Z Y_{1\mu} r_i^3 + \sum_{j=1}^N Y_{1\mu} r_j^3 \right) \quad (3.15)$$

ove r_i è il modulo della coordinata dell' i -esimo protone mentre r_j è la coordinata del j -esimo neutrone. Questa, scritta secondo le densità diventa:

$$B(E1)_{is} = \left| \int e r^3 Y_{1\mu}^* \delta_{\rho_{is}} dr d\Omega \right|^2 \quad (3.16)$$

Questa intensità si può misurare, per esempio, facendo urtare contro il nucleo particelle α .

Per quanto riguarda infine la forma della densità supporremo che sia la densità di protoni che quella di neutroni siano del tipo Woods-Saxon. Tuttavia ora non possiamo dire che, strettamente parlando, abbiano la stessa forma, in quanto la densità di protoni è praticamente nulla vicino alla superficie del nucleo e di ciò dovremo tenerne conto nella definizione delle densità. Possiamo dunque definirle come segue:

$$\rho_p = \frac{\rho_{0,p}}{1 + \exp\left(\frac{r-R_p}{a}\right)} \quad (3.17)$$

$$\rho_n = \frac{\rho_{0,n}}{1 + \exp\left(\frac{r-R_n}{a}\right)} \quad (3.18)$$

ove per far tornare l'evidenza sperimentale abbiamo che $R_n > R_p$. Inoltre in questo caso i fattori di normalizzazione non hanno una semplice relazione di proporzionalità. Ora possiamo definire le densità di neutroni di core e di skin:

$$\rho_n^C = \frac{N^C}{Z} \rho_p \quad (3.19)$$

$$\rho_n^V = \rho_n - \rho_n^C \quad (3.20)$$

¹Stiamo seguendo la ragionevole ipotesi che le densità non abbiano comunque una forma troppo diversa.

²In realtà la dicitura $B(E1)$ in questo caso è impropria in quanto l'operatore non è più relativo ad una multipolarità elettrica

3.3 Il modello del nucleo a tre fluidi per nuclei deformati

La situazione si complica nuovamente per nuclei deformati. Come detto, questi nuclei sono quelli che si trovano lontano dalla valle di stabilità. Per esempio molti di essi sono isotopi ricchi di neutroni, con un numero di neutroni lontano dalla valle di stabilità. Anche in questo caso vale il modello, con le dovute differenze, a tre fluidi. In linea di principio la forma di "core" e valenza potrebbe essere completamente diversa in quanto la densità di protoni e neutroni potrebbe avere una forma differente, specie in caso di nuclei molto deformati. Noi tuttavia ci restringiamo in modo analogo a quanto fatto per le risonanze giganti e supponiamo che la deformazione sia quadrupolare lungo l'asse di simmetria e che sia esattamente la stessa per core e skin. Avremo quindi, assumendo la forma di Woods-Saxon per le densità:

$$\rho_p = \frac{\rho_{0,p}}{1 + \exp\left(\frac{r - R_p(1 + \beta_2 Y_{20})}{a}\right)} \quad (3.21)$$

$$\rho_n^C = \frac{N^C}{Z} \rho_p \quad (3.22)$$

$$\rho_n^V = \rho_n - \rho_n^C \quad (3.23)$$

dove la densità totale di neutroni ρ_n è:

$$\rho_n = \frac{\rho_{0,n}}{1 + \exp\left(\frac{r - R_n(1 + \beta_2 Y_{20})}{a}\right)} \quad (3.24)$$

Supponiamo ora che il nucleo subisca un'ulteriore deformazione dinamica dovuta ad un'oscillazione dipolare, cioè descritta da un'armonica sferica $Y_{1\mu}$. La densità per i tre fluidi sarà:

$$\rho_{p,vibr}(r, \theta, \phi) = \rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu}, \theta, \phi) = \frac{\rho_{0,p}}{1 + \exp\left(\frac{r - R_p(1 + \beta_2 Y_{20}) + \Delta_p Y_{1\mu}}{a}\right)} \quad (3.25)$$

$$\rho_{n,vibr}^C(r, \theta, \phi) = \rho_n^C(r + \Delta_p Y_{1\mu}, \theta, \phi) = \frac{N^C}{Z} \rho_p(r + \Delta_p Y_{1\mu}, \theta, \phi) \quad (3.26)$$

$$\rho_{n,vibr}^V(r, \theta, \phi) = \rho_n(r + \Delta_n^V Y_{1\mu}, \theta, \phi) - \rho_n^C(r + \Delta_n^V Y_{1\mu}, \theta, \phi) \quad (3.27)$$

dove con ρ_n indichiamo la densità totale dei neutroni

$$\rho_n(r + \Delta_n^V, \theta, \phi) = \rho_{n,vibr}(r, \theta, \phi) = \frac{\rho_{0,n}}{1 + \exp\left(\frac{r - R_n(1 + \beta_2 Y_{20}) + \Delta_n^V Y_{1\mu}}{a}\right)} \quad (3.28)$$

Ora procedendo come nel caso sferico si trovano le densità di transizione:

$$\delta_{\rho_p} = \frac{N^V}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_p}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (3.29)$$

$$\delta_{\rho_n^C} = \frac{N^V}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_n^C}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (3.30)$$

$$\delta_{\rho_n^V} = -\frac{Z + N^C}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_n^V}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (3.31)$$

dove ora δ_1 è, al solito, il valore di aspettazione della distanza tra i centri di massa della valenza e del core. Possiamo ora definire anche le densità di transizione isoscalare e isovettoriale:

$$\delta_{\rho_{is}} = \delta_{\rho_n^C} + \delta_{\rho_n^V} + \delta\rho_p \quad (3.32)$$

$$\delta_{\rho_{is}} = \delta_{\rho_n^C} + \delta_{\rho_n^V} - \delta\rho_p \quad (3.33)$$

Analogamente a quanto già detto per il caso sferico ci aspettiamo che entrambe le componenti siano ben diverse da zero.

A causa della simmetria assiale, in modo analogo a quanto visto per le risonanze giganti ci saranno due casi: un'oscillazione lungo l'asse di simmetria della deformazione quadrupolare, descritto dal numero quantico $K = 0^-$, e un'oscillazione lungo un asse ortogonale, descritta dal numero quantico $K = \pm 1^-$. Anche in questo caso ci aspettiamo che la deformazione influenzi il comportamento della risonanza in modo analogo a quanto accadeva nel caso delle risonanze giganti. Infatti anche in questo caso c'è quello splitting di energie di cui si parlava nella Sezione 2.3: per nuclei prolatti l'energia delle oscillazioni lungo l'asse di simmetria sarà inferiore che quella delle risonanze nelle direzioni ortogonali. Si comporta in modo inverso il caso oblati. Quindi ci aspettiamo che le intensità si comportino in modo simile a quanto detto nella Sezione 2.3.

Per analizzare l'effetto della deformazione sulla risonanza il procedimento è identico a quello già svolto nel caso delle risonanze giganti. L'obiettivo è ancora di calcolare il rapporto, in funzione di β_2 :

$$R(\beta_2) = \frac{B(E1)^{K=0}}{B(E1)^{K=1}} \quad (3.34)$$

Tale rapporto in questo caso non è numericamente uguale per protoni e neutroni: questo è dovuto alla presenza dello skin. In ogni caso ci aspettiamo un comportamento simile per protoni e per neutroni a quello già visto nelle risonanze giganti al variare di K . In particolare all'aumentare di β_2 ci aspettiamo che aumenti il valore del rapporto.

Potremo anche definire il rapporto tra le intensità isoscalari, che dipenderà sempre da β_2 :

$$R_{is}(\beta_2) = \frac{B(E1)_{is}^{K=0}}{B(E1)_{is}^{K=1}} \quad (3.35)$$

ove:

$$B(E1)_{is}^{K=0} = \left| \int \delta_{is} r^5 Y_{10} dr d\Omega \right|^2 \quad (3.36)$$

$$B(E1)_{is}^{K=0} = B(E1)_{is}^{\mu=-1} + B(E1)_{is}^{\mu=1} \quad (3.37)$$

e

$$B(E1)_{is}^{\mu=-1} = \left| \int \delta_{is} r^5 Y_{1-1} dr d\Omega \right|^2 \quad (3.38)$$

$$B(E1)_{is}^{\mu=1} = \left| \int \delta_{is} r^5 Y_{11} dr d\Omega \right|^2 \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

Inoltre seguendo ci calcoleremo le proiezioni delle densità di transizione isoscalare e isovettoriale. Il significato di tali proiezioni è il seguente: la proiezione lungo l'armonica $Y_{\lambda\mu}$ è il valore di aspettazione della densità di transizione dallo stato fondamentale allo stato con momento angolare $I = \lambda$. Anche in questo caso valgono le seguenti regole di selezione: per vibrazioni lungo l'asse di simmetria gli stati possibili avranno momento angolare dispari e parità negativa, mentre nel caso di vibrazioni in direzione ortogonale all'asse di simmetria avremo invece l'unico vincolo che la parità deve essere negativa.

Capitolo 4

Studio numerico delle risonanze giganti e pygmy

4.1 Studio numerico delle risonanze giganti

4.1.1 Calcolo del rapporto tra le probabilità.

Per il nostro elaborato abbiamo scelto di studiare la risonanza gigante e pygmy dello ^{150}Sn . I valori dei numeri di protoni e neutroni di questo isotopo sono $Z=50$, $N=100$. Esso presenta un eccesso di neutroni, proprietà che useremo per trattare lo stesso isotopo anche per le pygmy. Inoltre è molto lontano dalla stabilità e quindi è molto deformato. Possiamo quindi usarlo come prototipo di un nucleo pesantemente deformato. Per analizzare l'effetto della deformazione sulle risonanze giganti, procedendo come indicato nella Sezione 2.3 abbiamo usato la densità (numerica) di protoni e neutroni della forma:

$$\rho_p(r, \theta, \beta_2) = \frac{Z}{A} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a}\right)} \quad (4.1)$$

$$\rho_n(r, \theta, \beta_2) = \frac{N}{A} \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))}{a}\right)} \quad (4.2)$$

ove abbiamo esplicitato anche la dipendenza dal fattore di deformazione β_2 . Ricordiamo che geometricamente tale parametro è positivo per nuclei prolatti, negativo per nuclei oblati e nullo per nuclei sferici. Nella prima fase dello studio numerico noi, seguendo il procedimento svolto nel Capitolo 2, ci calcoliamo il rapporto:

$$\frac{B(E1)^{K=0}}{B(E1)^{K=1}} \quad (4.3)$$

Si noti che il valore del parametro ρ_0 , che è utilizzato per normalizzare la densità, è lo stesso per entrambi i fattori e quindi in questa prima parte del lavoro si potrà ignorare. Allo stesso modo si potrà ignorare l'armonica sferica Y_{00} dello stato fondamentale, in quanto è una costante e si semplifica nel rapporto. Si erano poi definite le densità di transizione con parametro di deformazione δ_1 nel

modo seguente:

$$\delta_{\rho_p}^\mu(r, \theta, \phi, \beta_2) = \delta_1 \frac{N}{A} \frac{\partial \rho_p}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (4.4)$$

$$\delta_{\rho_n}^\mu(r, \theta, \phi, \beta_2) = -\delta_1 \frac{Z}{A} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (4.5)$$

Si erano quindi calcolate le intensità $B(E1)$ così:

$$B(E1)^{K=0} = \left| \int er \delta_{\rho_{iv}}^{\mu=0} Y_{10} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (4.6)$$

$$B(E1)^{\mu=\pm 1} = \left| \int er \delta_{\rho_{iv}}^{\mu=\pm 1} Y_{1\mu} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (4.7)$$

$$B(E1)^{K=1} = B(E1)^{\mu=1} + B(E1)^{\mu=-1} = 2B(E1)^{\mu=1} \quad (4.8)$$

dove $\delta_{\rho_{iv}}^\mu$ è la densità di transizione isovettoriale definita nel Capitolo 2. Per calcolare il rapporto resta solo R_0 , l'unico parametro libero diverso da β_2 : lo fissiamo col valore $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}} \simeq 6.376$ fm avendo dato a r_0 il valore di 1.2 fm. A questo punto si è potuto calcolare il rapporto facendo variare il valore β_2 entro valori fisicamente sensati. Si è scelto l'intervallo $-0.5 < \beta_2 < 0.5$. Si è quindi definita e graficata in tale intervallo la funzione:

$$R(\beta_2) = \frac{B(E1)^{K=0}}{B(E1)^{K=1}} \quad (4.9)$$

ove abbiamo lasciato implicita la dipendenza da β_2 delle $B(E1)$. In Figura 4.1, è riportato il grafico ottenuto. Come atteso il rapporto nel caso sferico, dove

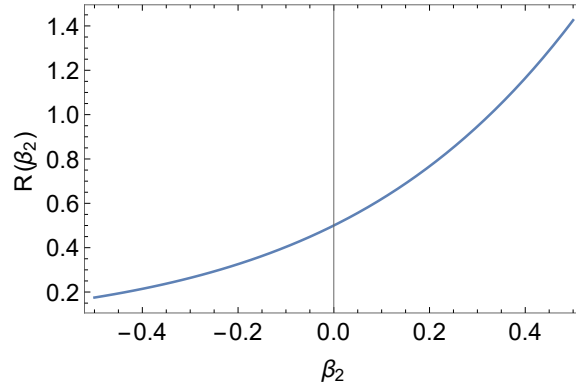


Figura 4.1: Questo è il grafico della funzione $R(\beta_2)$. Come atteso la funzione cresce con β_2 e per $\beta_2 = 0$ ha valore $\frac{1}{2}$. Si noti anche la quilinearità attorno a $\beta_2 = 0$.

c'è completa isotropia è $\frac{1}{2}$ e aumenta all'aumentare di β_2 corrispondentemente al fatto che il sistema oscilla con più probabilità proprio lungo l'asse più lungo. Nel caso dei nuclei prolati ove $\beta_2 > 0$ vi è una maggiore probabilità che il sistema oscilli lungo l'asse di simmetria e quindi il numeratore della funzione aumenta. Si comporta in modo del tutto opposto il caso $\beta_2 < 0$ come già evidenziato. Lo studio appena fatto tuttavia è da prendersi come una pura simulazione matematica: in realtà la deformazione del nucleo è fissata. Quello

che vogliamo vedere con questo grafico è come varierebbe il rapporto al variare del fattore di deformazione. Tra l'altro in Natura il valore β_2 dello ^{150}Sn non è nemmeno unico per protoni e neutroni: precisamente $\beta_{2,p} = 0.27$ e $\beta_{2,n} = 0.33$ [7]. Tuttavia come atteso per piccole deformazioni il rapporto ha un andamento lineare: tale andamento giustifica lo splitting delle energie, anch'esso per piccoli valori in modulo di β_2 proporzionale a β_2 .

4.1.2 Studio delle risonanze giganti con parametro di deformazione fissato

Dai dati forniti dei parametri di deformazione di protoni e neutroni, scritti alla fine della sottosezione precedente, abbiamo assunto che la deformazione fosse la stessa e abbiamo approssimato entrambe a $\beta_2 = 0.3$. Per fissare le idee poniamo $\delta_1 = 1$ fm. In Figura 4.2 riportiamo il grafico delle curve di livello della funzione di densità dei protoni. Omettiamo l'analogo grafico per i neutroni in quanto la forma sarebbe esattamente la stessa.

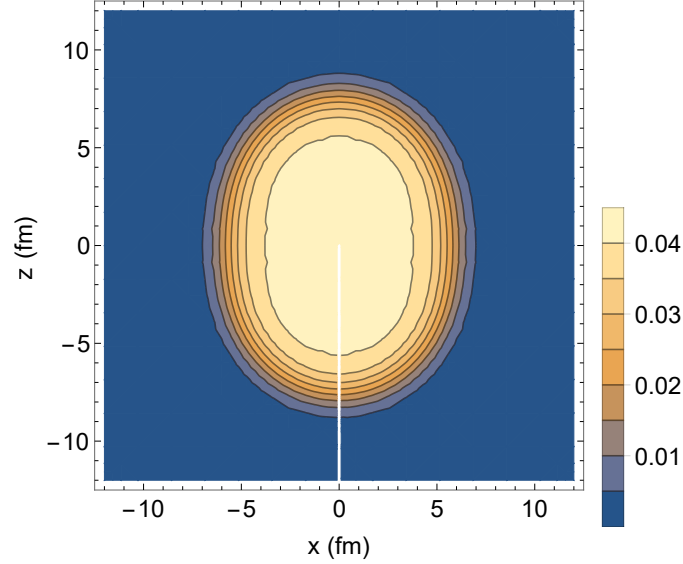


Figura 4.2: Stiamo facendo un grafico delle curve di livello della funzione di densità per $\phi = 0$, cioè nel piano (x, z) . L'asse verticale (z) è l'asse di simmetria del nucleo. Si può vedere in questo caso la forma prolata del nucleo

Successivamente come si può vedere nella Figura 4.3, abbiamo graficato le densità di transizione isovettoriale sia nella situazione $K = 0$ che nella situazione $K = 1$ ¹. Si può notare come nel primo caso (il grafico in alto) il picco della densità di transizione avviene per distanze maggiori dal centro, a conferma del

¹In ogni grafico relativo ad oscillazioni ortogonali all'asse di simmetria abbiamo sempre graficato il contributo della densità di transizione lungo una sola armonica sferica. In realtà come sappiamo il contributo all'intensità della transizione deriva da entrambi i contributi, che sono uguali. Quindi ogni densità di transizione relativa ad oscillazioni ortogonali andrebbe moltiplicato per due per vedere il vero contributo.

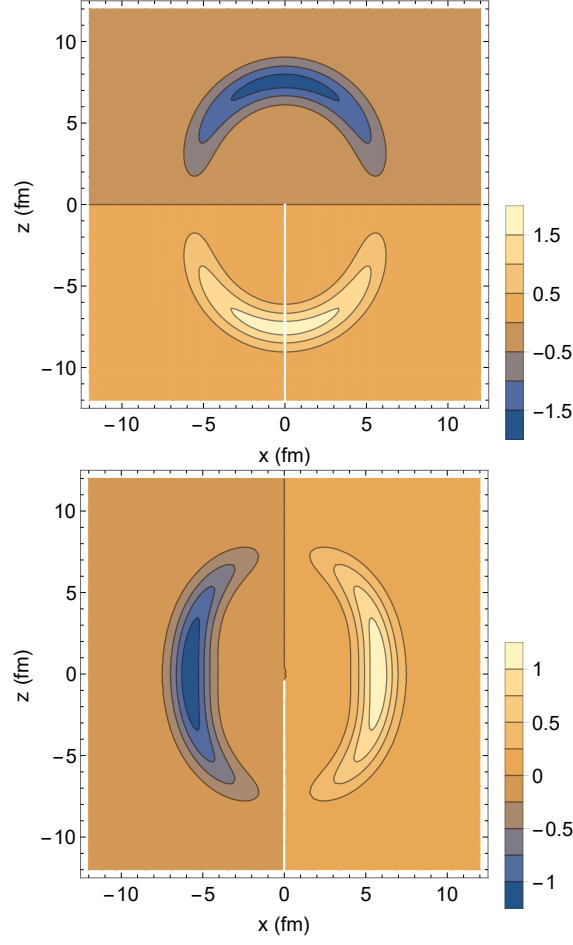


Figura 4.3: Grafico delle curve di livello della componente isovettoriale. In alto la risonanza avviene lungo l'asse di simmetria ($K = 0$), in basso su un asse ortogonale ($K = 1$). Si può notare che quando avviene lungo l'asse di simmetria il picco della deformazione avviene ad una distanza più grande dal centro del nucleo che nell'altro caso

fatto che si tratta di un'oscillazione lungo l'asse di simmetria: c'è infatti nel caso prolato un allungamento lungo tale direzione nel nucleo.

Come detto nel Capitolo 2, nel caso di deformazione le proiezioni della densità di transizione isovettoriale lungo le armoniche sferiche $Y_{\lambda i}$, se compatibili con le regole di selezione sono diverse da zero. Tuttavia tali componenti sono in realtà piccole anche se aumentano di importanza all'aumentare dei coefficienti δ_1 e β_2 . Nel caso sferico, cioè per $\beta_2 = 0$ lo stato è puramente 1^- . In Figura

4.4 riportiamo i grafici delle seguenti funzioni:

$$\delta_{\rho_{iv},10}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{10}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.10)$$

$$\delta_{\rho_{iv},30}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{30}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.11)$$

$$\delta_{\rho_{iv},50}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{50}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.12)$$

e

$$\delta_{\rho_{iv},11}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{11}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.13)$$

$$\delta_{\rho_{iv},31}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{31}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.14)$$

$$\delta_{\rho_{iv},51}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{\rho_{iv}} Y_{51}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.15)$$

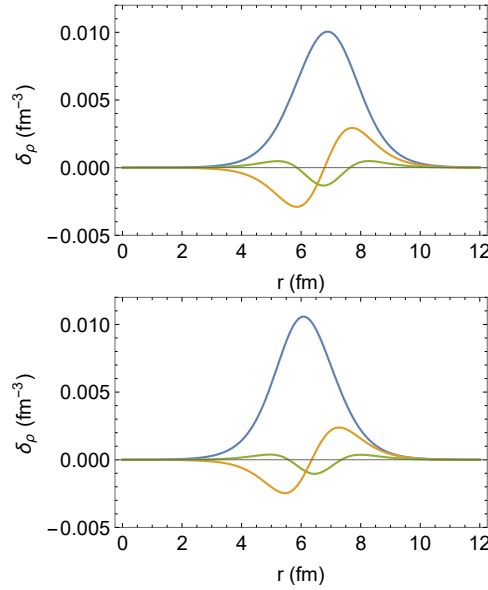


Figura 4.4: Come nella figura precedente in alto la risonanza avviene lungo l'asse di simmetria, in basso su un asse ortogonale. Nella figura a destra: sono indicate in blu le $\delta_{\rho_{iv},10}$, in arancione le $\delta_{\rho_{iv},30}$, infine in verde le $\delta_{\rho_{iv},50}$. In quella a destra: in blu $\delta_{\rho_{iv},11}$, in arancione le $\delta_{\rho_{iv},31}$, infine in verde le $\delta_{\rho_{iv},51}$.

Come si può vedere la proiezione sullo stato 1^- nei due casi ha il picco in posizione non coincidente. Questo splitting della distanza del picco, per piccole deformazioni è lineare in r . Infine in Figura 4.5 mostriamo un grafico in cui ci sono entrambe le componenti isovettoriali. In questa figura si nota molto bene che il picco delle curve è diverso. In particolare, come atteso, la coordinata r alla quale avviene il picco nel caso $K = 0$ è maggiore che nel caso $K = 1$

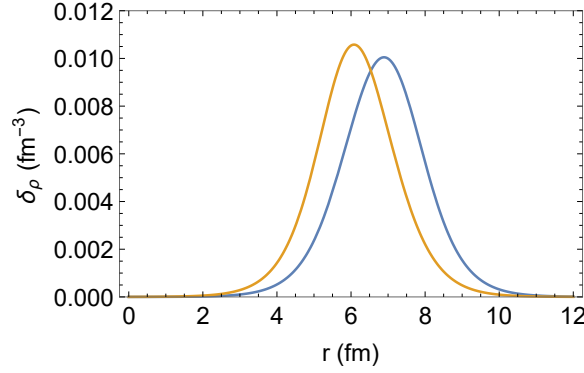


Figura 4.5: Grafico delle componenti isovettoriali nel caso dell'oscillazione lungo l'asse di simmetria (in blu) e lungo una direzione ortogonale (in arancione).

confermando che rappresenta oscillazioni lungo l'asse di simmetria.

4.2 Studio numerico delle risonanze pygmy

4.2.1 Calcolo del rapporto tra le probabilità

Anche nel caso delle pygmy utilizziamo la forma di Woods-Saxon per le densità. Come prima finché calcoliamo il rapporto il valore di δ_1 deve solo essere diverso da zero, il valore dei vari fattori di normalizzazione ρ_0 è completamente arbitrario. Inoltre l'analisi per neutroni del core e protoni è assolutamente identica, anzi in questo caso le densità di transizione hanno lo stesso segno. Per quanto riguarda il numero di neutroni del core assumeremo che sia $N^C = 50$. Invece nel caso dei neutroni della valenza vi è un problema in più: i parametri R_p e R_n sono diversi e quindi in generale anche i rapporti delle intensità saranno diversi. Assumiamo come valori per questi parametri i seguenti: $R_n = R_0 \simeq 6.376 fm$, $R_p = r_0(Z + N^C)^{\frac{1}{3}} \simeq 5.570 fm$. Successivamente abbiamo definito densità come segue:

$$\rho_p(r, \theta, \phi, \beta_2) = \frac{\rho_{0,p}}{(1 + \exp(\frac{r - R_p(1 + \beta_2 Y_{20})}{a}))} \quad (4.16)$$

$$\rho_n(r, \theta, \phi, \beta_2) = \frac{\rho_{0,n}}{(1 + \exp(\frac{r - R_n(1 + \beta_2 Y_{20})}{a}))} \quad (4.17)$$

$$\rho_n^C(r, \theta, \phi, \beta_2) = \frac{N^C}{Z} \rho_p \quad (4.18)$$

$$\rho_n^V(r, \theta, \phi, \beta_2) = \rho_n - \rho_n^C \quad (4.19)$$

e per le densità di transizione:

$$\delta_{\rho_p}^\mu = \frac{N^V}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_p}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (4.20)$$

$$\delta_{\rho_n^C}^\mu = \frac{N^V}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_n^C}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (4.21)$$

$$\delta_{\rho_n^V}^\mu = -\frac{N^C + Z}{A} \delta_1 \frac{\partial \rho_n^V}{\partial r} Y_{1\mu} \quad (4.22)$$

A questo punto definiamo anche le intensità $B(E1)$ come fatto nel Capitolo 3:

$$B(E1)^{K=0} = \left| \int er Y_{1\mu} \delta_{\rho_{iv}} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (4.23)$$

$$B(E1)^{\mu=-1} = \left| \int er Y_{1\mu} \delta_{\rho_{iv}} r^2 dr d\Omega \right|^2 \quad (4.24)$$

$$B(E1)^{K=1} = B(E1)^{\mu=-1} + B(E1)^{\mu=1} \quad (4.25)$$

Inoltre analogamente definiamo anche le $B(E1)_{is}$, già trattate nel Capitolo 3:

$$B(E1)_{is}^{K=0} = \left| \int \delta_{is}^{\mu=0} er^5 Y_{10} dr d\Omega \right|^2 \quad (4.26)$$

$$B(E1)_{is}^{\mu=\pm 1} = \left| \int \delta_{is}^{\mu=\pm 1} er^5 Y_{1\mu} dr d\Omega \right|^2 \quad (4.27)$$

$$B(E1)_{is}^{K=1} = B(E1)_{is}^{\mu=-1} + B(E1)_{is}^{\mu=1} \quad (4.28)$$

dove $\delta_{\rho_{is}}^\mu$ è la densità di transizione isoscalare definita nel Capitolo 3. Abbiamo quindi graficato i seguenti rapporti nell'intervallo fisicamente sensato ($-0.5 < \beta_2 < 0.5$):

$$R(\beta_2) = \frac{B(E1)^{K=0}}{B(E1)^{K=1}} \quad (4.29)$$

$$R_{is}(\beta_2) = \frac{B(E1)_{is}^{K=0}}{B(E1)_{is}^{K=1}} \quad (4.30)$$

In Figura 4.6, riportiamo i grafici di entrambi i rapporti mentre in Figura 4.7 è graficato il loro rapporto.

Come atteso entrambi i rapporti per $\beta_2 = 0$ sono uguali a $\frac{1}{2}$. Si noti anche che R_{is} cresce molto più rapidamente di R . Questo risultato spiegabile dal fatto che nel caso delle $B(E1)_{is}$ la dipendenza da r dell'integrando è del tipo r^3 mentre nel caso della $B(E1)$ la dipendenza è del tipo r .

4.2.2 Studio delle risonanze pygmy con parametro di deformazione fissato

Il procedimento è ancora analogo a quello delle risonanze giganti. Tuttavia in questo caso dovremo distinguere core e skin. Infatti già il grafico delle curve di livello introduce una differenza, che però è evidentemente dovuta alla diversità dei parametri R_n e R_p . Per quanto riguarda gli altri parametri li assumiamo identici al caso precedente con $\beta_2 = 0.3$, valore scelto perchè medio tra quelli

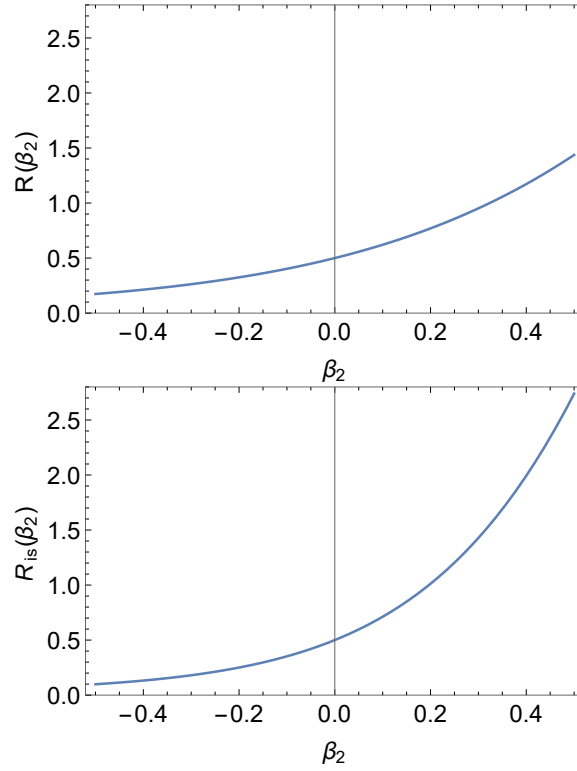


Figura 4.6: Il grafico in alto è relativo al rapporto tra le due $B(E1)$ mentre quello in basso è relativo al rapporto tra le due $B(E1)_{is}$. Si noti la maggior pendenza nel secondo caso

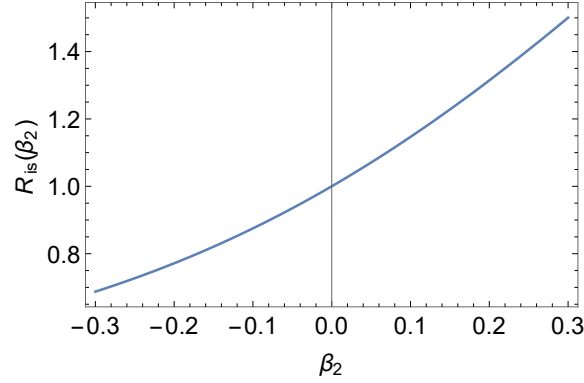


Figura 4.7: Questo è il grafico del rapporto tra R_{is} e R . A conferma della maggiore pendenza di R_{is} il rapporto è maggiore di 1 per $\beta_2 > 0$ e minore di 1 per $\beta_2 < 0$.

relativi a protoni e neutroni presenti nell'articolo [7]. Inoltre poniamo come prima $\delta_1 = 1$ fm. In Figura 4.8, sono riportati i grafici delle curve di livello delle due funzioni di densità. La diversità nella forma è dovuta al fatto che i parametri R_p e R_n sono diversi e al fatto che i neutroni di valenza sono situati

principalmente vicino alla superficie del nucleo.

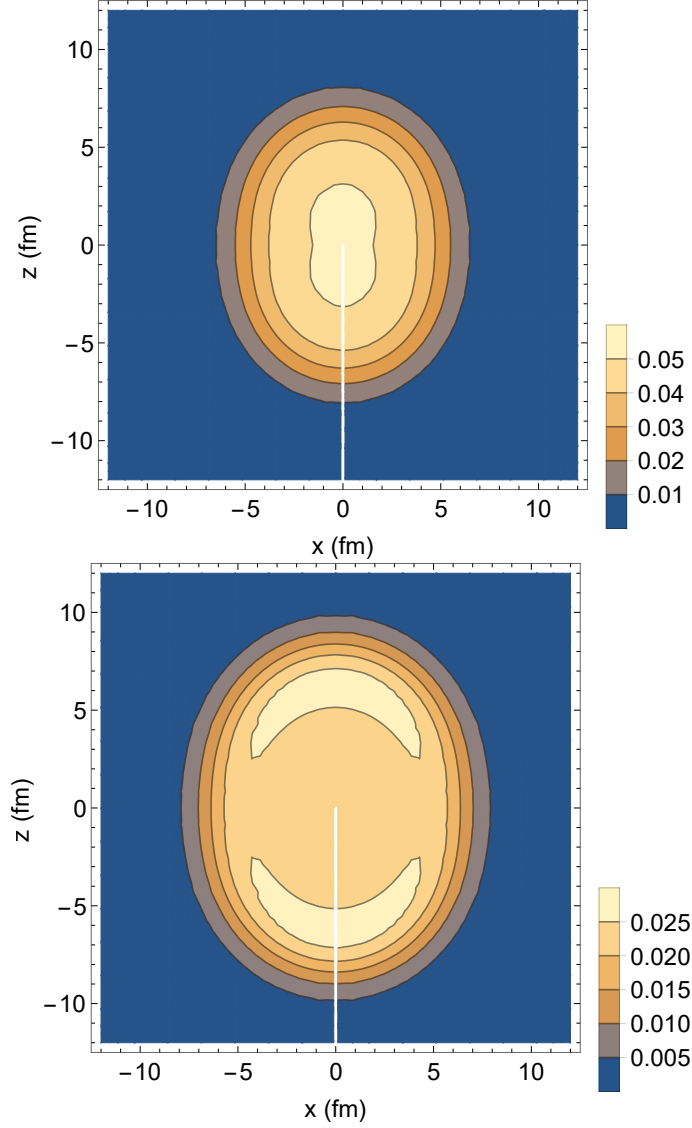


Figura 4.8: Il grafico in alto è il grafico delle curve di livello della densità dei protoni, quello in basso della densità di neutroni della valenza

In Figura 4.9 e 4.10 invece riportiamo, rispettivamente, i grafici delle densità di transizione isoscalare e isovettoriale:

Poi abbiamo calcolato le proiezioni lungo le armoniche sferiche delle densità di

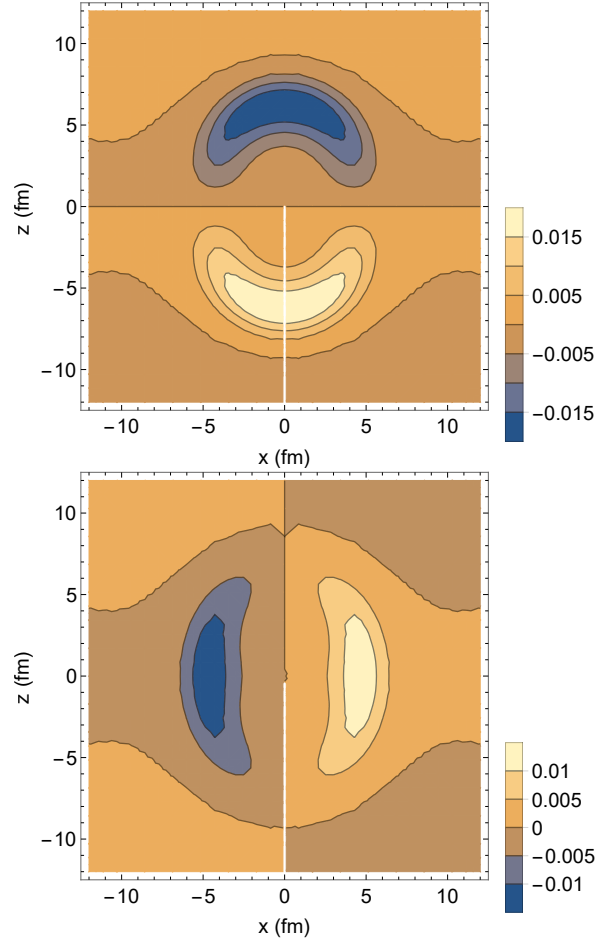


Figura 4.9: I grafici si riferiscono alle curve di livello della densità di transizione isoscalare, precisamente quello in alto nel caso di una oscillazione lungo l'asse di simmetria mentre quello in basso un' oscillazione ortogonale ad esso.

transizione isoscalare e isovettoriale:

$$\delta\rho_{is,1i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{is} Y_{1i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.31)$$

$$\delta\rho_{is,3i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{is} Y_{3i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.32)$$

$$\delta\rho_{is,5i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{is} Y_{5i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.33)$$

$$\delta\rho_{iv,1i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{iv} Y_{1i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.34)$$

$$\delta\rho_{iv,3i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{iv} Y_{3i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.35)$$

$$\delta\rho_{iv,5i}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta\rho_{iv} Y_{5i}^* \sin(\theta) d\phi d\theta \quad (4.36)$$

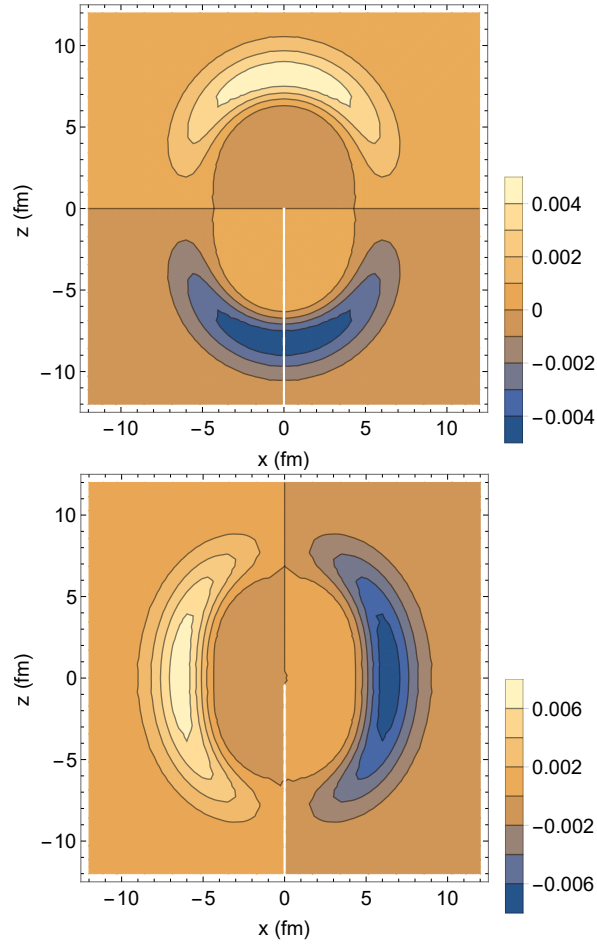


Figura 4.10: I grafici si riferiscono alle curve di livello della densità di transizione isovettoriale, precisamente quello in alto nel caso di una oscillazione lungo l'asse di simmetria mentre quello in basso un'oscillazione ortogonale ad esso.

dove $i = -1, 0, 1$ mentre. Anche in questo caso vediamo che la proiezione più intensa è quella relativa allo stato 1^- . Tutte le altre componenti sono a confronto molto piccole. Nelle Figure 4.11 e 4.12, i grafici di tali proiezioni.

Infine riportiamo tutte le proiezioni lungo le armoniche dipolari delle componenti isoscalari e isovettoriali in Figura 4.13. Come si può vedere dunque la presenza di neutroni che vibrano in fase coi protoni fa in modo che la risonanza pygmy sia un misto delle due componenti. Tale proprietà è sfruttata per studiare la struttura dei nuclei con un elevato eccesso di neutroni attraverso sonde isoscalari.

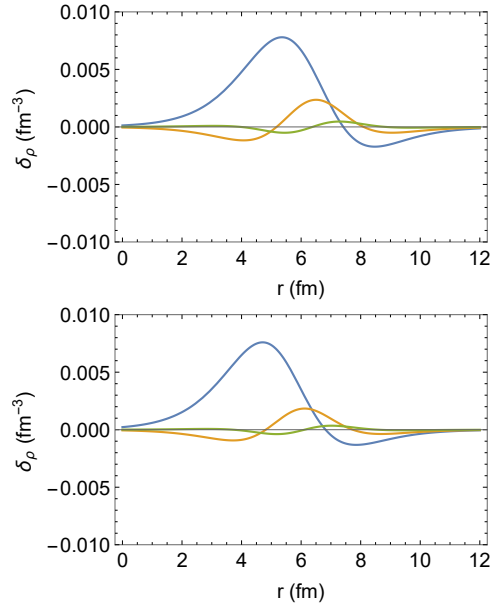


Figura 4.11: In alto la risonanza avviene lungo l'asse di simmetria, in basso su un asse ortogonale. In blu sono indicate le $\delta\rho_{is,1i}$, in arancione le $\delta\rho_{is,3i}$, infine in verde le $\delta\rho_{is,5i}$.

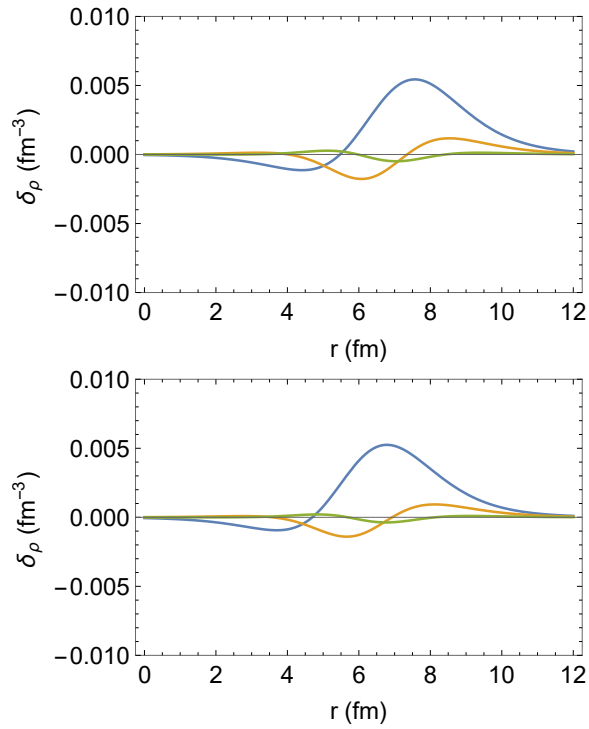


Figura 4.12: Come nella figura precedente in alto la risonanza avviene lungo l'asse di simmetria, in basso su un asse ortogonale. In blu sono indicate le $\delta\rho_{iv,1i}$, in arancione le $\delta\rho_{iv,3i}$, infine in verde le $\delta\rho_{iv,5i}$.

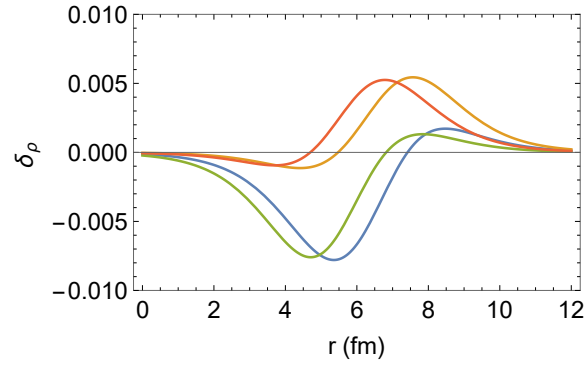


Figura 4.13: In questo grafico la curva blu è la componente isoscalare dell'oscillazione lungo l'asse di simmetria, la curva arancione è la componente isovettoriale dell'oscillazione lungo l'asse di simmetria, mentre quella verde e quella rossa sono rispettivamente le componenti isoscalare e isovettoriale dell'oscillazione in una direzione ortogonale all'asse di simmetria.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro si è studiato l'effetto di una deformazione assiale e quadrupolare sulle risonanze giganti e pygmy di dipolo.

In entrambi si è visto che al crescere del coefficiente di deformazione il rapporto tra l'intensità dell'oscillazione, quantificata dalla $B(E1)$, lungo l'asse di simmetria e dell'oscillazione lungo una qualsiasi direzione ortogonale cresceva. Ciò è spiegabile come già osservato che per i nucleoni è più facile oscillare lungo la direzione in cui la “buca” di potenziale è più estesa. Nel caso dei nuclei prolatti, come quello che abbiamo studiato nel Capitolo 4, tale direzione coincide con quella dell'asse di simmetria. Inversamente nel caso dei nuclei oblati il nucleo si restringe proprio lungo questa direzione e quindi è più probabile che i nucleoni oscillino ortogonalmente ad esso. Nel caso delle pygmy l'intensità di transizione isoscalare $B(E1)_{is}$ si comporta in modo simile. È stato comunque evidenziato che la crescita del rapporto delle $B(E1)_{is}$ relative ad oscillazioni lungo l'asse di simmetria e ortogonali ad esso, è maggiore dell'analogo rapporto relativo alle $B(E1)$ elettromagnetiche (o isovettoriali). Ricordiamo che la $B(E1)_{is}$ è approssimativamente proporzionale alla sezione d'urto per reazioni con sonde isoscalari (ad esempio (α, α')) mentre quella elettromagnetica è proporzionale alla sezione d'urto con sonde di natura isovettoriale (tipo fotoni o protoni.) Quindi questa piccola differenza tra le due $B(E1)$ potrebbe generare una diversa popolazione delle due risonanze a seconda del proiettile utilizzato.

Inoltre l'effetto della deformazione è quello di creare delle bande rotazionali sia nello stato fondamentale che negli stati eccitati. In particolare abbiamo visto che nel caso del ^{150}Sn che le densità di transizione relative a transizioni a stati delle bande con momento angolare $I = 3$ e $I = 5$ pur essendo piccole a confronto che quella relativa alla transizione allo stato con $I = 1$ erano comunque apprezzabilmente diverse da zero. Nel caso sferico invece tali transizioni, a causa dell'assenza delle bande, non si generano.

Bibliografia

- [1] G.C Baldwin, G.S. Kleber, Phys. Rev. **71**, 1 (1947).
- [2] M.Goldhaber and E.Teller, Phys. Rev. **74**, 1046 (1948).
- [3] H. Steinwedel, J.H.D. Jensen and P.Jensen, Phys. Rev. **79**, 1019 (1950).
- [4] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol II*, World Scientific.
- [5] G.A. Bartholomew, Ann. Rev. Nucl. Sci. **11**, 259 (1961)
- [6] R. Mohan, M. Danos and L.C. Biedenharn, Phys. Rev. C **3**, 1740 (1971).
- [7] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer.
- [8] D. Peña Arteaga, E. Khan and P. Ring Phys. Rev. C **79**, 034311 (2009).
- [9] E.G. Lanza, A. Vitturi and M.V. Andrés, Phys. Rev. C **91**, 054607 (2015).
- [10] S. Péru, H. Goutte, J.F. Berger, Nucl. Phys. **A788**, 44c-49c (2007).
- [11] H. Steinwedel and E.Teller, Z. Naturforsch. **5a**, 413 (1950).
- [12] T. Tamura, Rev. Mod. Phys. Vol 11, 1 (1965).